**Готовимся к Единому**

**Государственному Экзамену**

**Математика**

**Решение**

**логарифмических неравенств.**

Авторы – составители:

**Сахабутдинова С.М.**

учитель математики высшей квалификационной категории МБОУ «Гимназия №2» имени Баки Урманче г. Нижнекамска

**Галиякбарова Ф.Ш.**

учитель математики высшей квалификационной категории МБОУ «Гимназия №2» имени Баки Урманче г. Нижнекамска

В предлагаемом пособии представлены наиболее трудные задания, используемые на ЕГЭ по математике в последние годы. Рассмотрены основные методы и приемы их решений. Даны подробные решения с пояснениями и комментариями к каждой задаче и ответы.

Пособие предназначено для учителей и методистов с целью организации углубленной подготовки выпускников школ к ЕГЭ по математике, будет полезно также учащимся 10-11 классов, желающим самостоятельно познакомиться с основными приемами и методами решения задач высокого уровня. Цель данного пособия – дать возможность учащимся 10-х, 11-х классов потренироваться в выполнении таких видов заданий, которые включаются в ЕГЭ, проверить себя по темам школьного курса и подготовиться к предстоящему экзамену. Разобравшись с предложенным решением конкретного задания, попытайтесь его воспроизвести, подумайте, нет ли решения рациональнее.

Общее требование к выполнению заданий с развернутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, должны быть рассмотрены все возможные случаи.

За последние годы в процессе проведения ЕГЭ наметилась тенденция к усложнению задач второй части пакета заданий под номерами 13-19. Одновременно увеличилась и значимость успешности решения этих заданий, которые дают возможность увеличить сумму баллов. Без целенаправленной подготовки к решению этих заданий получение 80 баллов и более абсолютно невозможно, даже если учитывать фактор везения. Если задания уровня 13 или 14 по сложности – это задания для всех успевающих по математике выпускников общеобразовательной школы, то начиная с 15 сложность заданий соответствует уже высокому и повышенному уровням сложности. Тем самым уровень сложности заданий 15 весьма точно соответствует границе между базовым и повышенным уровнями освоения школьного курса математики. Задание 15 – это задание на решение логарифмического неравенства, в том числе и с переменным основанием логарифма.

В чем же должна выражаться целенаправленная подготовка к успешному выполнению этой категории заданий? Учителя и учащиеся должны познакомиться для начала с типовым задачами на моделирование, связанное с исследованием целевой функции на минимум или максимум, на исследование функциональных свойств систем уравнений. Далее необходимо уяснить, какие методы используются при решении той или иной типовой задачи. Как правило, это не частные приемы, а достаточно общие способы действий.

При решении логарифмических неравенств необходимо помнить:

1. общие свойства неравенств;
2. свойство монотонности логарифмической функции;
3. область определения логарифмической функции.

**Основные методы решения логарифмических неравенств**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Практика экзаменов показывает, что наибольшую сложность для школьников представляют трансцендентные неравенства. При решении этих неравенств методом интервалов вычисление значений функций в промежуточных точках может вызвать трудности вычислительного характера. Для рациональных функций такие вычисления несколько проще. Более того, при решении рациональных неравенств, записанных в каноническом виде, расстановку знаков значений функций на промежутках можно проводить и без контрольных точек.  
 Чтобы устранить указанные проблемы и расширить возможности применения метода интервалов при решении трансцендентных неравенств можно использовать метод *рационализации неравенств*.  
 Метод рационализации заключается в замене сложного выражения *F(x)* на более простое выражение *G(x)* (в конечном счете, рациональное), при которой неравенство *G(x)* 0 равносильно неравенству *F(x)* 0 на области определения выражения *F(x).*

Все условия равносильности формально точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.   
 Выделим некоторые типовые выражения *F* и соответствующие им рационализирующие выражения *G* где *f, g, h, p, q* – выражения с переменной *x* (*h*>0, *h*≠1; *f*>0; *g*>0), *a* – фиксированное число (*a*>0, *a*≠1).

|  |  |
| --- | --- |
| Выражение *F* | Выражение *G* |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Рассмотренный метод рационализации обобщается на произведение и частное любого числа типовых выражений.

В указанных равносильных переходах символ «˅» заменяет один из знаков неравенств: «˃», «˂», «≤», «≥».

Преимущество приведенных равносильных выражений состоит в том, что мы *за один шаг* освободились от логарифмов и переменных оснований, и теперь, если основание логарифма и логарифмируемые выражения являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

***1.Решите неравенство***



***Решение***.

.

Функция у = 0,3t убывает на R, т.к a= 0,3; 0,31.

Имеем: 2х2 – 3х + 6 5, 2х2 – 3х + 1 0.

Решим это неравенство методом интервалов.

*f*(х) = 2х2 – 3х +1, х ∈ R.

*f*(х) = 0, при х = 1, х =

**f**

+

–

+

1/2

1

***x***

*f*(х)0 на (; ) U ( 1; +).

***Ответ***: (; ) U (1; +).

***2 . Решите неравенство***

096.

***Решение.***

84 ОДЗ: х∈ R

Поскольку функция у = 8t возрастает (a= 8, 8 1), то с учетом ОДЗ имеем:

4,

8х 16,

23х24 Функция у = 2t возрастает, т.к a = 2, 2 1.

Имеем: 3х 4, x .

***Ответ***: (+).

***3.Решите неравенство***

log 0,5(х2 – 5х +6) > –1.

***Решение.***

– log2 (х2 – 5х + 6) –1, log 2(х2 – 5х +6) 1, log 2(х2 – 5х +6) log 22.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

x2–5х +6 <2, x2– 5х +4<0, (x–1)(x–4)<0, 1<x<4,

x2 – 5х +6 >0; x2 – 5х +6 >0; (х–2) (х–3) >0; x>3,

х<2.

х∈(1; 2) U (3;4).

***Ответ***: (1;2) U (3;4).

***4. Решите неравенство***



***Решение.***

ОДЗ: >0, 0 < x <.

-log 3 ) –1, log3 ) 1, log3 ) log33.

Функция у = log3 t возрастает т.к. a = 3, 3 1 при t0 то имеем:

3, – 3 , 0, 0, 0, 0.

**f**

+

–

+

0

1/3

***x***

С учетом ОДЗ имеем: x∈[ ; ).

***Ответ***: [ ; ).

***5. Решить неравенство* 2х + 2 |х| 2.**

***Решение.***

x, если х

|х|= –х, если х

1. х0, |х|= х.

2х + 2х 2, 2∙2х  2, 2х , .

Функция у = 2t возрастает, т.к. a = 2, 21

Имеем: х, х.

x0;

1. x0, |х| = –х

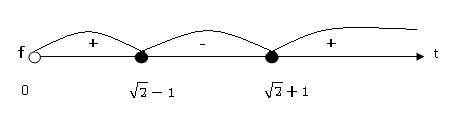
2х + 2-х 2

Пусть 2х = t, t 0. Тогда имеем: t + – 2

Решим методом интервалов

f(t) = , f(t) =0, t2 – 2t +1 = 0, D = 8–4 = 4,

t1 = = +1; t2 = = –1.



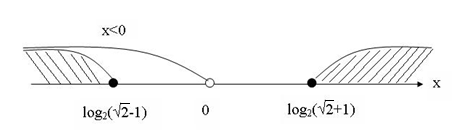
t ∈ (0; – 1] U[ +1;+ ). Вернемся к прежней переменной.

Имеем,

2х –1, 2х +1,

log2  2х log2 (– 1), log2  2х log2 ( + 1),

x log2 ( – 1). x log2 ( – 1).



Учитывая, что х 0 получаем



х∈ (-.

***Ответ***: (- U [; +).

***6. Решите неравенство***

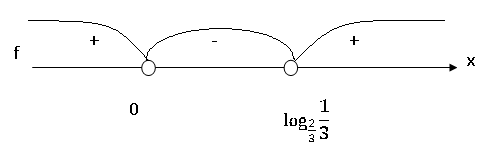
81+ .

***Решение.***

Учитывая, что 3х 0, разделим числитель и знаменатель дроби на .

8 1+, 0, 0, 0, 0, f(х)= ,

f(х)=0, – = 0, х= ,

 – 1 0; х0. х∈ (0; ).

***Ответ***: (0;).

***7. Решите неравенство***

372 ∙ 3-х ∙ > 1.

***Решение.***

372 ∙ 3-х ∙ > 1, 3>1, у = 3t – возрастающая функция,

> 30, 72 – х – > 0, х+ – 72 < 0,

Пусть = t, t 0.

t2 + t – 72 < 0, (t +9) (t – 8) < 0, -9 < t < 8.

Значит, 0 8, 0 64.

Ответ [0; 64).

***8. Решите неравенство***



***Решение.***

log3 > log3 (х-2), > 0, *х*+1> 0, х+1>0,

*x*–2 > 0, *х*–2> 0, х–2 >0,

> *х*–2; <0; <0

х>2,

х <, 2 < х <.

–1 < х <;

Решением данного неравенства является (2; ).

***Ответ***: (2; ).

***9. Решите неравенство***

( )lg*x* -2 < 100.

***Решение.***

ОДЗ: х>0.

( )lg*x* -2 < 100, ( )lg*х* ∙( )-2 < 100, ( )lg*х* ∙< 100, ( )lg*х* ∙< 1,

∙  1< 0, < 0.

f(х)= , f(х)=0.

= 0, хlgх – х3 = 0, хlgх = х3, lgх = 3, х=1000,

х 0; х 0; х=1, х = 1, х 0; х 0.

+

–

+

1

1000

f

***x***

0

f(х)< 0 при х∈ (1; 1000).

***Ответ***: (1; 1000).

***10. Решите неравенство***

log|х|( – х –1) 1.

***Решение.***

log|х|( – х –1) 1, log|х| ( – х –1) log|х| |х| ,

|х|> 0, х0; х1; х1,

|х| 0, >х+1,

–х–1>0, (|х| –1) (–х–1–|х|) 0;

(|х| -1) (–х–1–|х| 0;

х0; х1; х1, х0; х1; х1,

х+1 <0, х<-1,

9–х2 0, –3 х 3,

х+10, х –1,

9-х2 > (х+1)2 , < х <,

(|х| –1) (–х–1–|х|) 0; (|х|–1) (–х–1–|х|) 0;

х0; х-1; х1,

–3 х –1, – х –1,

–1 х , х1.

– х –1,

х1;

***Ответ***: [– –1) U [ 1).

***11.Решите неравенство***

log|х+2| (4+7х-2х2) ≤2.

***Решение.*** log|х+2| (4+7х-2х2) ≤2,



Если a0, b>0, c>1, то logсa – logсb и (a – b) – одного знака

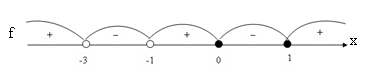
  
Воспользуемся тем, что числа |t| – 1 и t2 -1 одного знака: 



Решение первого неравенства системы:

 (1) 

Числа -3, -1, 0, 1 разбивают числовую прямую на интервалы (-∞;-3);(-3;-1),   
(-1;0), (0;1); (1; +∞) на каждом из которых функция f(х) =непрерывна, не обращается в нуль, поэтому сохраняет постоянный знак. Так как числа -3, -1, 0, 1 различные, действительные, то имеем чередование знаков

f(х)≥ 0 при Решением неравенства (1) является -0,5<х<4.

Следовательно,

***Ответ***: (-0,5; 0] U [1; 4).

***12.Решите неравенство***

***Решение.***  



***Ответ***: {1} U(1,5; 3).

***13.Решите неравенство***



***Решение.*** ОДЗ: 5х -1≠  0; х≠0.

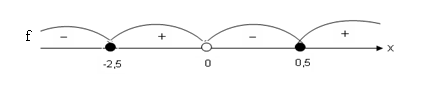
Преобразуем неравенство:

Решим неравенство методом интервалов.

Пусть f (х) = 

Нули функции:



f (х) ≤ 0 на [-2,5; 0) U (0; 0,5].

***Ответ***. [-2,5; 0) U (0; 0,5].

***14.Решите неравенство***



***Решение.***

ОДЗ:



Преобразуем неравенство:

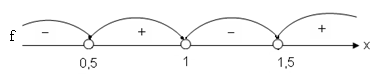


Решим неравенство методом интервалов

Пусть 

Нули функции





Решением данного неравенства является (0,5; 1).

***Ответ***. (0,5; 1).

***15.Решите неравенство*** log2х+3 х2 <1.

***Решение.***

log2х+3 х2 <1 , log2х+3 х2 < log2х+3 (2х+3) ,





Решением исходного неравенства является (-1,5; -1) U (-1; 0) U (0; 3).

***Ответ***. (-1,5; -1) U (-1; 0) U (0; 3).

***16.Решите неравенство***

logх (log9 (3х – 9)) < 1.

***Решение.***

logх (log9 (3х – 9)) < 1.

ОДЗ:

x> log3 10.



logх (log9 (3х – 9)) < 1, logх (log9 (3х – 9)) < logх х, т.к х> log3 10

log9 (3х – 9) < х, log9 (3х – 9) < log9 9х, 3х – 9 < 9 х, 32х – 3х +9>0,

Пусть 3х = t, t>0

t2- t + 9  > 0, 

t2- t + 9 > 0 при всех допустимых значениях t, и значит, 32х -3х + 9 >0 при всех допустимых значениях **х**.

Следовательно, решением данного неравенства является х> log3 10.

***Ответ***. х> log3 10.

***17. Решите неравенство***



***Решение.***

ОДЗ:  Преобразуем неравенство

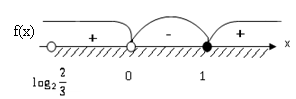


Решим неравенство методом интервалов

Пусть f (х)= 

Нули функции





х∈ (log2 ; 0) U [1; +8). ***Ответ***. (log2 ; 0) U [1; +8).

***18.Решите неравенство***



***Решение.***















***Ответ***.

***19. Решите неравенство***



***Решение.*** 



Решением неравенства является

***Ответ***. 

***20. Решите неравенство***



***Решение.***









***Ответ***. 3.

***21. Решите неравенство***

***Решение.***

ОДЗ:

Проведем преобразования неравенства, равносильные на области определения.

Применяя метод рационализации, получаем неравенство

С учетом области определения решением исходного неравенства является

***Ответ***.  ***22.Решите неравенство***

***Решение.***

ОДЗ:

Проведем преобразования неравенства, равносильные на области определения.

Применяя метод рационализации, получаем неравенство

С учетом ОДЗ решением исходного неравенства является

***Ответ***.

***Литература***.

1. Открытый банк заданий ЕГЭ по математике (электронный ресурс). [www.mathege.ru](http://www.mathege.ru)
2. Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева. Все для ЕГЭ 2012. Книга 1. Школьные технологии. Москва, 2012.
3. Панферов В.С., Сергеев И.Н. ЕГЭ – 2010 Математика. Задача С3 / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010.
4. Потапов М.К., Шевкин А.В., Вуколова Т.М. О решении неравенств вида f(a(x)) >f(b(x)) // Математика в школе, 2005, №5.
5. С.И. Колесникова. Решение сложных задач Единого Государственного Экзамена. М.: Айрис-пресс, 2005.
6. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2019. Легион-М, 2018.
7. [http://www.kakprosto.ru](http://www.kakprosto.ru/) (Образование).
8. [http://nature.web.ru](http://nature.web.ru/) (Научная сеть).
9. ФИПИ. ЕГЭ 2019. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся.
10. С.А. Шестаков, П.И.Захаров. ЕГЭ 2015. Математика. Задача С1.
11. А.Г.Мордкович, П.В. Семенов. Алгебра и начала анализа. 10, класс.
12. А.Г.Мордкович, П.В. Семенов. Алгебра и начала анализа. 11, класс.